把握方向，精准备考

——近三年高考重难点试题分析

主讲人：段纪飞

单　位：邯郸市第一中学

高考数学全国卷（I）解答题概览

解答题	2019年	2018年	2017年
17题	解三角形	解三角形	解三角形
18题	线面平行，二面角	面面垂直，二面角	面面垂直，二面角
19题	抛物线	椭圆	概率统计
20题	导数极值点，零点	概率统计	椭圆
21题	概率统计与数列	函数的单调性，极值点	函数导数
22题	参数方程	极坐标方程	参数方程
23题	不等式证明	绝对值不等式解法，不等式恒成立	绝对值不等式解法，不等式恒成立

高考数学全国I卷理科主观题得分情况

题号	二	17	18	19	20	21	22	23	总分平均
分值	20	12	12	12	12	12	10	10	90
2017年	9.61	7.92	8.61	3.4	5.59	2.43	5.6	4.43	43
2018年	12.93	8.88	7.25	6.1	2.35	3.39	6.68	6.97	47.58
2019年	9.87	8.19	9.11	4.82	1.54	2.15	3.2	4.3	39.16

高考数学全国I卷文科主观题得分情况

题号	二	17	18	19	20	21	22	23	总分平均
分值	20	12	12	12	12	12	10	10	90
2017年	7.99	5.07	3.98	2.3	1.66	0.76	3.25	2.23	24.3
2018年	11.32	5.98	4.22	6.77	2.66	2.43	4.39	4.28	37.65
2019年	6.82	9.23	5.37	5.58	1.1	0.9	2.0	2.0	31.07

1 近三年导数解答题研究

2 近三年概率与统计解答题研究

01 近三年导数解答题研究

三年导数解答题对比

1.关于含参数的函数的讨论

含参讨论是否弱化

命题时未有有意识地改变

2019年

文I含参

文理III含参

其余不含参

2018年

理3套含参

文3套不含参

2017年

文理6套含参

三年导数解答题对比

2.设问发生改变

（2017 年全国 I 卷理科第 21 题） 已知函数 $f(x)=ae^{2x}+(a-2)e^{x}-x$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $f(x)$ 有两个零点，求 a 的取值范围.

（2018 年全国 I 卷理科第 21 题） 已知函数 $f(x)=\frac{1}{x}-x+a\ln x$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1，x_2，证明：$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$.

三年导数解答题对比

（2019 年全国III卷理科 20 题）已知函数 $f(x)=2x^3-ax^2+b$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）是否存在 a,b，使得 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 的最小值为 -1 且最大值为 1？若存在，求出 a,b 的所有值；若不存在，说明理由.

（2019 年全国II 卷文科 21 题）已知函数 $f(x)=(x-1)\ln x-x-1$．证明：

（1） $f(x)$ 存在唯一的极值点；

（2） $f(x)=0$ 有且仅有两个实根，且两个实根互为倒数.

（2019 年全国II 卷理科 20 题）已知函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{x+1}{x-1}$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性，并证明 $f(x)$ 有且仅有两个零点；

（2）设 x_0 是 $f(x)$ 的一个零点，证明曲线 $y=\ln x$ 在点 $A\left(x_0,y_0\right)$ 处的切线也是曲线 $y=e^x$ 的切线.

三年导数解答题对比

不变：注重解析式变化(即认为背景公平)

改变：原来设问简明扼要；

2019年设问开放，思路新颖，顺序前提，难度适当降低

国务院办公厅印发《关于新时代推进普通高中育人方式改革的指导意见》中指出：从优化考试内容、**创新试题形式**、科学设置试题难度和加强命题能力建设三方面提高命题水平，根据高校人才培养目标和专业学习基本需要，不断完善招生专业选考科目要求，并把综合素质评价作为招生录取的重要参考。

高考函数导数零点问题中的“卡根”

（2017 年全国I 卷理科 21 题）已知函数 $f(x)=ae^{2x}+(a-2)e^{x}-x$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $f(x)$ 有两个零点，求 a 的取值范围.

（2）$0<a<1$时， $f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln a)$ 上是减函数，在 $(-\ln a,+\infty)$ 上是增函数，且 $f(-\ln a)<0$.

又 $f(-2)=ae^{-4}+(a-2)e^{-2}+2>2e^{-2}+2>0$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln a)$ 上有一个零点.

设正整数 n_0 满足 $n_0>\ln\left(\frac{3}{a}-1\right)$，

则 $f(n_0)=e^{n_0}\left(ae^{n_0}+a-2\right)-n_0>e^{n_0}-n_0>0$，

$e^{x}(ae^{x}+a-2)>x$

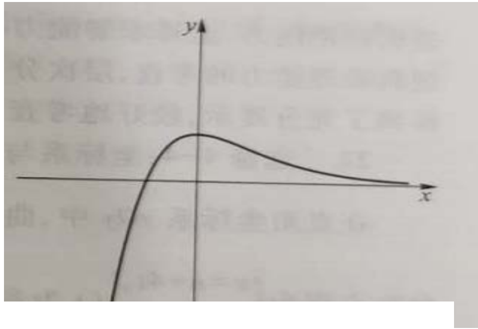
两两配对

$\begin{cases} e^{x}>x \\ ae^{x}+a-2>1 \end{cases}$ 得 $x>\ln\left(\frac{3}{a}-1\right)$

由于 $\ln\left(\frac{3}{a}-1\right)>-\ln a$，因此 $f(x)$ 在 $(-\ln a,+\infty)$ 上有一个零点.

高考函数导数零点问题中的“卡根”

思路2.参变分离



由于$e^{2x}+e^{x}>0$，从而$f(x)=0$等价于$a=\dfrac{2e^{x}+x}{e^{2x}+e^{x}}$，

故函数$f(x)$有两个零点等于直线$y=a$与曲线$y=\dfrac{2e^{x}+x}{e^{2x}+e^{x}}$有两个交点，

设$h(x)=\dfrac{2e^{x}+x}{e^{2x}+e^{x}}$，则$h'(x)=\dfrac{(2e^{x}+1)(e^{x}+x-1)}{e^{x}(e^{x}+1)^{2}}$，当$x\in(-\infty,0)$时，$h'(x)>0$；当$x\in(0,+\infty)$时，$h'(x)<0$，

所以$h(x)$在$(-\infty,0)$上单调递增，在$(0,+\infty)$上单调递减，$h(x)$在$x=0$处取得最大值，最大值为$h(0)=1$.

可以得到$y=h(x)$的大致图像如图所示.

故当$a\le 0$或$a\ge 1$时，直线$y=a$与曲线$y=h(x)$没有两个交点，从而$f(x)$没有两个零点；

当$0<a<1$时，直线$y=a$与曲线$y=h(x)$有两个交点，故$f(x)$有两个零点，从而可得a的取值范围为$(0,1)$.

高考函数导数零点问题中的“卡根”

（2018 年全国II 卷文科 21 题）已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-a(x^2+x+1)$．

（1）若 $a=3$，求 $f(x)$ 的单调区间；

（2）证明：$f(x)$ 只有一个零点．

（2）由于 $x^2+x+1>0$，所以 $f(x)=0$ 等价于 $\frac{x^3}{x^2+x+1}-3a=0$．

设 $g(x)=\frac{x^3}{x^2+x+1}-3a$，则 $g'(x)=\frac{x^2\left(x^2+2x+3\right)}{\left(x^2+x+1\right)^2}\geq 0$，仅当 x=0 时 $g'(x)=0$，

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增．故 $g(x)$ 至多有一

又 $f(3a-1)=-6a^2+2a-\frac{1}{3}=-6\left(a-\frac{1}{6}\right)^2-\frac{1}{6}<0$，　$f(3a+$

$$g(x)=\frac{x^3}{x^2+x+1}-3a$$
$$=\frac{x^3-1+1}{x^2+x+1}-3a$$
$$=x-1+\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}-3a$$
$$=x-1-3a+\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

降次处理

综上，$f(x)$ 只有一个零点．

近三年导数解答题研究——

应用零点存在性定理关于判断函数符号那些事

- ➢ 极限定性（好用但不严谨，慎用）；
- ➢ 放缩到“可解”;
- ➢ 把握方程的本质，“挪到”合适位置;
- ➢ 怎样“知式” 画图.

（2019 年全国I 卷理科 20 题）已知函数 $f(x)=\sin x-\ln(x+1)$，$f'(x)$为 $f(x)$的导数.证明：

（1） $f'(x)$在区间$\left(-1,\dfrac{\pi}{2}\right)$存在唯一极大值点；

（2） $f(x)$有且仅有 2 个零点.

高考函数导数“多元”问题中的消元

（2018 年全国I 卷理科 21 题）

题目：已知函数 $f(x)=\frac{1}{x}-x+a\ln x$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1， x_2， 证明： $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$.

高考函数导数“多元”问题中的消元

导数是数学中的一个内涵十分丰富的核心概念，也是一种强有力工具，为研究函数的图象、性质，探求函数的极值、最值，求曲线的切线斜率，证明不等式等提供了新的视角和方法，相应也就成为高中数学知识的一个重要交汇点，是“变知识立意为能力立意，在知识的交汇处设计试题”的高考命题思想的重要载体。

本题沿袭了这一传统，既考查了学生逻辑推理、数学运算、模型建构、直观想象等核心数学思想，也考查了学生灵活运用转化与化归、分类讨论、函数与方程、数形结合等数学思想方法分析问题、解决问题的能力，同时题干简明，问题明确，入手容易，而深入则需要扎实的数学基本功，平均得分率约为28%，不失为一道较好的压轴题。

解：（1） $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$， $f'(x)=-\frac{1}{x^2}-1+\frac{a}{x}=-\frac{x^2-ax+1}{x^2}$.

（ i ）当$a\leqslant 0$时， $f'(x)<0$，于是原函数$f(x)$单调递减.

（ ii ）当$a>0$时，令$g(x)=x^2-ax+1$，

①$\Delta=0$，此时$a=2$或$a=-2$（舍去），此时 $f'(x)\leq 0$，原函数单调递减.

②$\Delta<0$，此时$-2<a<2$，和$a>0$取交集，也即当$0<a<2$时， $f'(x)<0$，原函数单调递减.

③$\Delta>0$，此时$a>2$或$a<-2$，和$a>0$取交集，也即当$a>2$，

令$f'(x)=0$得，$x=\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$或$x=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$.

$\because a>2$时，$\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}>0$，

$\therefore$当$x\in\left(0,\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty\right)$时，$f'(x)<0$，原函数单调递减；

当$x\in\left(\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$时，$f'(x)>0$，原函数单调递增.

综上所述，$a\leqslant 2$时，原函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减.

$a>2$时，$f(x)$在$\left(0,\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$，$\left(\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty\right)$单调递减，在$\left(\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$单调递增.

高考函数导数“多元”问题中的消元

本题解题的关键是认真审题，合理进行问题转化。特别是在第二问中，要能够根据题意，找到隐含条件：由第一问可知，存在两个极值点，那么必须有$a>2$.若设两个极值点分别为 x_1,x_2 .它们是 $-x^2+ax-1=0$ 的根，则 $x_1+x_2=a,x_1x_2=1$，在此基础上构造合理的函数模型进行问题转化.典型解法如下：

高考函数导数“多元”问题中的消元

解法一（分离参数）：要证 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$，即要证 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}+2<a$.

分离参变

由第一问可知，$f(x)$ 存在两个极值点，那么 $a>2$.

设两个极值点分别为 x_1，x_2，它们是 $x^2-ax+1=0$ 的根，所以 $x_1+x_2=a$，$x_1x_2=1$，

所以 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}+2=\dfrac{\dfrac{1}{x_1}-x_1+a\ln x_1-\dfrac{1}{x_2}+x_2-a\ln x_2}{x_1-x_2}+2=\dfrac{a\ln\dfrac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}$，即要证 $\dfrac{a\ln\dfrac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}<a$，需证 $\dfrac{\ln\dfrac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}<1$，

挖掘条件

不妨设 $0<x_1<1<x_2$，又因为 $x_1x_2=1$，所以 $x_1=\dfrac{1}{x_2}$，

代入消元

代入到上式中，既要证 $-2\ln x_2>\dfrac{1}{x_2}-x_2$ ……………………………①

令 $g(x)=2\ln x+\dfrac{1}{x}-x(x>1)$，要证 $g(x)<0$，

那么 $g'(x)=-\dfrac{(x-1)^2}{x^2}<0$，为单调递减函数.故 $g(x)<g(1)=0$，得证.

高考函数导数“多元”问题中的消元

另外，也可以对①式进行如下变形：

$g(x)=\dfrac{2x\ln x}{x^2-1}(x>1)$，证明 $g(x)<1$ 即可，那么 $g'(x)=\dfrac{2(x^2-1)-2(x^2+1)\ln x}{(x^2-1)^2}$，

令 $\varphi(x)=(x^2-1)-(x^2+1)\ln x$，那么 $\varphi'(x)=\dfrac{x^2-2x^2\ln x-1}{x}$，

令 $h(x)=x^2-2x^2\ln x-1$，那么 $h'(x)=-4x\ln x<0$，

所以函数 $h(x)$ 单调递减，$h(x)<h(1)<0$，

所以函数 $\varphi(x)$ 单调递减，$\varphi(x)<\varphi(1)<0$，

所以函数 $g(x)$ 单调递减，$g(x)<g(1)$.

$\lim\limits_{x\to1}g(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x\ln x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x+1}{x}=1$（洛必达法则），得证.

高考函数导数“多元”问题中的消元

解法二（代换法）：要证 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$，即要证 $-2+\dfrac{(x_1+x_2)\ln\dfrac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}<a-2$，

即证：$\dfrac{\dfrac{x_1}{x_2}+1}{\dfrac{x_1}{x_2}-1}\ln\dfrac{x_1}{x_2}<x_1+x_2$， 令 $\dfrac{x_1}{x_2}=t(t>1)$，又因为 $x_1x_2=1$，所以 $x_1=\sqrt{t}$， $x_1=\dfrac{1}{\sqrt{t}}$，

代入到上式，有：$\dfrac{t+1}{t-1}\ln t<\sqrt{t}+\dfrac{1}{\sqrt{t}}$，即证 $\ln t<\dfrac{t-1}{\sqrt{t}}$ ……………………………②

令 $g(t)=\ln t-\dfrac{t-1}{\sqrt{t}}$，则 $g'(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{t+1}{2t\sqrt{t}}=-\dfrac{(\sqrt{t}-1)^2}{2t\sqrt{t}}<0$.

所以 $g(t)$ 是一个单调递减函数，所以 $g(t)<g(1)=0$，得证.

高考函数导数“多元”问题中的消元

解法三（齐次消元）：要证 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}+2=\frac{\frac{1}{x_1}-x_1+a\ln x_1-\frac{1}{x_2}+x_2-a\ln x_2}{x_1-x_2}+2=\frac{a\ln\frac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}$$

即要证 $\dfrac{a(\ln x_1-\ln x_2)}{x_1-x_2}<a$ $\qquad f(x) \qquad a>2$

需证 $\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}<1$ $\qquad x_1x_2=1 \qquad \dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}<\dfrac{1}{\sqrt{x_1x_2}}$

此背景即大家熟悉的 A-L-G 不等式，不再赘述.

导数解答题备考建议

1.夯实“求单调性、极值、最值”的基本题型

理科	数学	文科	数学
填空	10.66	填空	7.24
17三角	8.97	17概率	8.59
18立几	9.09	18数列	4.85
19解几	4.25	19立几	4.76
20导数	2.42	20导数	1.14
21概率	2.48	21解几	0.22
22参极	3.32	22参极	1.9
23不等式	3.87	23不等式	1.92
总分	45.06	总分	30.62

导数的考查认识已经趋同：

- 命题回归本源，略高于教材
- 侧重考查单调性极值最值
- 零点切线证明不等式恒成立

破除原有备考思维——中等以下学生规避导数题或其第二问；

引导学生扎实学好教材内容，以不变应万变！

导数解答题备考建议

2.注意用<u>导数的观点</u>重新包装函数和三角函数试题

★ （2018年全国I卷理科16题）

已知函数f（x）=2sin$x$+sin2x，则f（x）的最小值是__________.

解：$f'(x)=2\cos x+2\cos 2x=4\cos^2 x+2\cos x-2=4(\cos x+1)\left(\cos x-\dfrac{1}{2}\right)$

设$f(x)=g(\cos x)=g(t), t=\cos x\in[-1,1]$

此时$g'(t)=(1+t)(2t-1)$

由单调性易知：$g(t)_{\min}=g(\dfrac{1}{2})=2\times\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

导数解答题备考建议

3.对导数试题进行分类，深度地研究，形成内在规律，抓住问题的本质

(1)导数中不含参数的单调性问题

(2)含参数的导数讨论问题

★**确定单调区间：**应进行分类，导数表达式分为“能因式分解型”、“不能因式分解型”、“超越型(含e^x,$\ln x$)”.

(3)弄清何时“虚设零点”？“虚设零点”后，如何处理?

近三年导数解答题研究---由“多元”想到的.

由多元最值想到的

01 化繁为简的消元策略

02 巧妙的同构式解题

03 加强和弱化命题在解题中的应用

04 “一鱼三吃”——例谈多元最值

02 近三年概率与统计解答题研究

——数学应用视角下的统计与概率综合问题

概率统计——数据分析核心素养

时代赋予了新的含义，近几年全国卷出现了好多亮点经典试题，有效地考查了考生的运算求解能力、数据处理能力及应用意识。此类试题表达最长，对综合能力的考查越来越强，越来越具有选拔性。

2017年，19题，正态分布，二项分布及数学期望，σ的整体运算及估值，统计推断；

2018年，20题，二项分布及数学期望，利用导数求最值，统计推断；

2019年，21题，分布列，等比数列的概念、求和，统计推断。

近三年概率统计解答题概览

试题年份	题号	考查知识点	涉及统计图或表	字符数
2017（I）	19	正态分布3σ的理解，统计推断，期望与方差	表格	440
2018（I）	20	二项分布、导数求最值、期望、统计决策	文字语言	333
2019（I）	21	分布列，与数列结合、统计决策	文字语言	401
2019（II）	18	相互独立事件的概率	文字语言	153

概率统计解答题分析

例 1 （2017 年高考数学全国卷Ⅰ理科第 19 题）为了监控某种零件的一条生产线的生产过程，检验员每天从该生产线上随机抽取 16 个零件，并测量其尺寸（单位：cm）.根据长期生产经验，可以认为这条生产线正常状态下生产的零件的尺寸服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$.

（1）假设生产状态正常，记 X 表示一天内抽取的 16 个零件中其尺寸在 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 之外的零件数，求 $P(X\geqslant 1)$ 及 X 的数学期望；

（2）一天内抽检零件中，如果出现了尺寸在 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 之外的零件，就认为这条生产线在这一天的生产过程可能出现了异常情况，需对当天的生产过程进行检查.试说明上述监控生产过程方法的合理性.（后面略）

这道题以工厂生产线的质量控制为背景，考查二项分布、正态分布与 3σ 原则和数据的处理能力，很好地考查了学生的阅读理解能力和概率与统计的思想方法.但是这道题在考场上吓倒一批，读晕一批，算迷一批，得分率很低！据统计该题全省均分为 2.43 分，有 10 万多人得 0 分.尤其是考生对于第（2）问中说明上述监控生产过程方法的合理性不知如何表述回答，进而影响到后面的解答.这与老师平时对《概率与统计》的教学中只要求学生机械的记忆公式，忽视概率统计中最本质的东西有很大关系！因此，数学核心素养不等于“知识人”，也不等于“技术人”，而是培养“完整人”.核心素养反映了数学本质与数学思想，是知识、能力、态度等不同成分在解决问题过程中的综合表现.

概率统计解答题分析

（2）（i）如果生产状态正常，一个零件尺寸落在$(\mu-3\sigma，\mu+3\sigma)$之外的概率只有0.0026，一天内抽取的16个零件中，出现尺寸在$(\mu-3\sigma，\mu+3\sigma)$之外的概念只有0.0408，发生的概念很小.因此一旦发生这种情况，就有理由认为这条生产线在这一天的生产过程可能出现了异常情况，需对当天的生产过程进行检查，可见上述监控生产过程的方法是合理的.

（ii）由$\overline{x}=9.97, s=0.212$，得$\mu$的估计值为$\hat{\mu}=9.97$，$\sigma$的估计值为$\hat{\sigma}=0.212$，由样本数据可以看出有一个零件的尺寸在$(\hat{\mu}-3\hat{\sigma}, \hat{\mu}+3\hat{\sigma})$之外，因此需对当天的生产过程进行检查.

剔除$(\hat{\mu}-3\hat{\sigma}, \hat{\mu}+3\hat{\sigma})$之外的数据9.22，剩下数据的平均值为$\dfrac{9.97\times16-9.22}{15}=10.02$，因此$\mu$的估计值为10.02.

$$\sum_{i=1}^{16}x_i^2=16\times0.212^2+16\times9.97^2\approx1591.134,$$

剔除$(\hat{\mu}-3\hat{\sigma}, \hat{\mu}+3\hat{\sigma})$之外的数据9.22，剩下数据的样本方差为$\dfrac{1}{15}\left(1591.134-9.22^2+15\times10.02^2\right)\approx0.008$，

因此σ的估计值为$\sqrt{0.008}\approx0.09$.

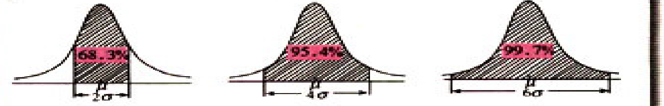


图1　　图2　　图3

从密度曲线图可以测量出这个总体在$(\mu-\sigma,\ \mu+\sigma)$ $(\mu-2\sigma,\ \mu+2\sigma)$和$(\mu-3\sigma,\ \mu+3\sigma)$等区间内取值的百分比是：

区　间	取值的百分比
$(\mu-\sigma,\ \mu+\sigma)$	68.3%
$(\mu-2\sigma,\ \mu+2\sigma)$	95.4%
$(\mu-3\sigma,\ \mu+3\sigma)$	99.7%

上述总体分布在产品质量控制中的应用是非常广泛的．例如，工人生产零件时，零件尺寸一般服从$N(\mu,\ \sigma^2)$分布．这样，零件尺寸在$(\mu-3\sigma,\ \mu+3\sigma)$以外取值的只有0.3%，它表明在大量重复试验中，平均每抽取1 000个零件，属于这个范围以外的尺寸大约有3个．因此在一批产品中随机抽取一个零件，零件尺寸在$(\mu-3\sigma,\ \mu+3\sigma)$以外是几乎不可能发生的．一旦这种情况发生，即零件尺寸x满足$|x-\mu|\geq 3\sigma$，我们就有理由认为生产中可能出现了异常情况．比如，可能原料、机器出了问题，或工艺规程不完善，或工人操作时精力不集中等．这种情况下，需要停机检查，找出原因，使生产过程重新控制在一种正常状态，从而避免继续生产更多的次品，以保证产品质量．

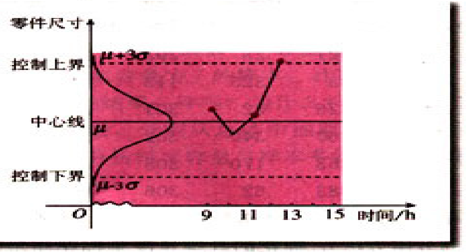


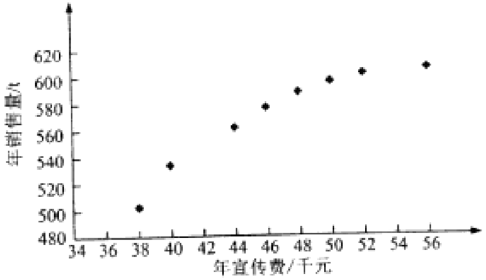
图 4

这就是运用统计原理进行产品质量控制的基本思想．目前，在生产中广泛运用的质量控制图（图 4），就是根据上述原理制作的．

图 4 实际上是将图 3 旋转 90°后得到的．在生产过程中，从某一时刻起，每隔一定时间任取一个零件进行检查，将其尺寸用圆点在图中表示出来，如果圆点在控制界限以内，

高考试题取材于课本

（2015 年高考新课标I 卷理科 19 题）某公司为确定下一年度投入某种产品的宣传费，需了解年宣传费 x（单位：千元）对年销售量 y（单位：t）和年利润 z（单位：千元）的影响，对近 8 年的年宣传费 x_i 和年销售量 y_i（$i=1,2,\cdots,8$）数据作了初步处理，得到下面的散点图及一些统计量的值.



$\vec{x}$	$\vec{y}$	$\vec{w}$	$\sum\limits_{i=1}^{8}(x_i-\overline{x})^2$	$\sum\limits_{i=1}^{8}(w_i-\overline{w})^2$	$\sum\limits_{i=1}^{8}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})$	$\sum\limits_{i=1}^{8}(w_i-\overline{w})(y_i-\overline{y})$
46.6	56.3	6.8	289.8	1.6	1469	108.8

表中 $w_i=\sqrt{x_i}$ ，$\vec{w}=\frac{1}{8}\sum\limits_{i=1}^{8}w_i$

（I ）根据散点图判断，$y=a+bx$ 与 $y=c+d\sqrt{x}$ 哪一个适宜作为年销售量 y 关于年宣传费 x 的回归方程类型？（给出判断即可，不必说明理由）

（II ）根据（I ）的判断结果及表中数据，建立 y 关于 x 的回归方程；

（III）已知这种产品的年利率 z 与 x、y 的关系为 $z=0.2y-x$.根据（II ）的结果回答下列问题：

（i ）年宣传费 $x=49$ 时，年销售量及年利润的预报值是多少？

（ii ）年宣传费 x 为何值时，年利率的预报值最大？

例 2 一只红铃虫的产卵数 y 和温度 x 有关，现收集了 7 组观测数据列于表 1-5 中，试建立 y 与 x 之间的回归方程.

表 1-5

温度 x/℃	21	23	25	27	29	32	35
产卵数 y/个	7	11	21	24	66	115	325

解：根据收集的数据，作散点图：

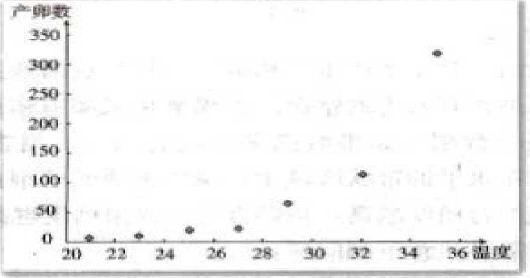


图 1.1-6

在图 1.1-6 中，样本点并没有分布在某个带状区域内，因此两个变量不呈线性相关关系，所以不能直接利用线性回归方程来建立两个变量之间的关系. 根据已有的函数知识，可以发现样本点分布在某一条指数函数曲线 $y=c_1e^{c_2x}$ 的周围，其中 c_1 和 c_2 是待定的参数.

现在，问题变为如何估计待定参数 c_1 和 c_2. 我们可以通过对数变换把指数关系变为线性关系. 令 $z=\ln y$，则变换后样本点应该分布在直线

$$z=bx+a\ (a=\ln c_1,\ b=c_2)$$

的周围. 这样，就可以利用线性回归模型来建立 y 和 x 之间的非线性回归方程❶了.

❶ 当回归方程不是形如 $y=bx+a$ (a, $b\in\mathbf{R}$) 时，称之为非线性回归方程.

由表 1-5 的数据可以得到变换后的样本数据表 1-6，图 1.1-7 给出了表 1-6 中数据的散点图. 从图 1.1-7 中可以看出，变换后的样本点分布在一条直线的附近，因此可以用线性回归方程来拟合.

概率统计解答题分析

（2018 年全国I 卷理科 20 题）某工厂的某种产品成箱包装，每箱 200 件，每一箱产品在交付用户之前要对产品作检验，如检验出不合格品，则更换为合格品，检验时，先从这箱产品中任取 20 件产品作检验，再根据检验结果决定是否对余下的所有产品做检验，设每件产品为不合格品的概率都为 P（$0<P<1$），且各件产品是否为不合格品相互独立。

（1）记 20 件产品中恰有 2 件不合格品的概率为 f（P），求 f（P）的最大值点 P_0。

（2）现对一箱产品检验了 20 件，结果恰有 2 件不合格品，以（1）中确定的 P_0 作为 P 的值，已知每件产品的检验费用为 2 元，若有不合格品进入用户手中，则工厂要对每件不合格品支付 25 元的赔偿费用。

（i）若不对该箱余下的产品作检验，这一箱产品的检验费用与赔偿费用的和记为 X，求 EX;

（ii）以检验费用与赔偿费用和的期望值为决策依据，是否该对这箱余下的所有产品作检验？

概率统计解答题分析

本题为基于现实背景的应用题，希望考生能够通过数据分析做出决策，是一道考查数据分析素养的好题。但本题得分率却不高，仅为20%，零分率高达34.2%，相较往年有较大差异，其中原因值得深思。

本题第一问的标准参考答案为:

20 件产品中恰有 2 件不合格品的概率为 $f(p)=\mathrm{C}_{20}^{2}p^{2}(1-p)^{18}$.

因此 $f'(p)=\mathrm{C}_{20}^{2}[2p(1-p)^{18}-18p^{2}(1-p)^{17}]=2\mathrm{C}_{20}^{2}p(1-p)^{17}(1-10p)$.

令 $f'(p)=0$，得 $p=0.1$.当 $p\in(0,0.1)$ 时，$f'(p)>0$；当 $p\in(0.1,1)$ 时，$f'(p)<0$.

所以 $f(p)$ 的最大值点为 $p_0=0.1$.

概率统计解答题分析

事实上，很多考生在得出$f(p)=C_{20}^{2}p^{2}(1-p)^{18}$后，如何求最大值点出现了困惑。不习惯运用函数实现处理概率问题，说明“随机变量思想”，“分布函数思想”远未形成，河北省考生约75%的考生得分在2分上下，大多为这种情况。

方法二：不等式法

20 件产品中恰有 2 件不合格品的概率为：

$$f'(p)=C_{20}^{2}p^{2}(1-p)^{18}=190p^{2}(1-p)^{18}\le\frac{190}{9^{18}}\left[p^{2}\left(\frac{1-p}{9}\right)^{18}\right]$$

$$=\frac{190}{9^{18}}\left[\frac{2p+18\left(\dfrac{1-p}{9}\right)}{20}\right]^{20}=\frac{190}{9^{18}}\left(\frac{1}{10}\right)^{20}$$

当且仅当 $\frac{1-p}{9}=p$ 时等号成立，此时 $p=\frac{1}{10}$，故 $p_0=\frac{1}{10}$.

概率统计解答题分析

（2）现对一箱产品检验了 20 件，结果恰有 2 件不合格品，以（1）中确定的 P_0 作

第一种： 由（1）知，$p = 0.1$

件产

$Y \sim B(180, 0.1)$

$EY = 180 \times 0.1 = 18$　$X = 20 \times 2 + 25Y$　　$X = 40 + 25Y$

$EX = E(40 + 25Y) = 40 + 25EY = 490$

第二种： 令 Y 表示 1 件产品中的赔偿费用，则可能情况如下：

Y	0	25
P	0.9	0.1

$EY = 25 \times 0.1 = 2.5$　　$EX = 20 \times 2 + 180EY = 490$

概率统计解答题分析

本题的命题立意可能是用一种直观具体的实际问题引领学生体会这一统计思想，但这一考查目标基本落空。归结原因，可能还是在日常教学中发展学生“数据分析”素养的课程目标落实的不够到位，对于随机思想和基本概念的理解不够全面深刻，甚至错误。

这一点从第二问的作答中也能表现出来，下面是两例学生的典型做法：

案例1：因为$p=0.1$，不合格品的数量为（220-20）$p=18$件，

所以$EX=20\times2+18\times25=490$元。

案例2：$EX=20\times2+$（$200\times0.1-2$）$\times25=490$元。

以上案例说明，学生并没有真正理解“概率”的含义，更多的是利用“比例”的思想（确定性思想）进行计算了。

概率统计解答题分析

（2019 年全国I 卷 21 题）为治疗某种疾病，研制了甲、乙两种新药，希望知道哪种新药更有效，为此进行动物试验。试验方案如下：每一轮选取两只白鼠对药效进行对比试验，对于两只白鼠，随机选一只施以甲药，另一只施以乙药。一轮治疗结果得出后，再进行下一轮试验。当其中一种药治愈的白鼠比另一种药治愈的白鼠多 4 只时，就停止试验，并认为治愈只数多的药更有效。为了方便描述问题，约定：对于每轮试验，若施以甲药的白鼠治愈且施以乙药的白鼠未治愈则甲药得1分，乙药得-1分；若施以乙药的白鼠治愈且施以甲药的白鼠未治愈则乙药得1分，甲药得-1分；若都治愈或都未治愈则两种药均得 0 分。甲、乙两种药的治愈率分别记为α、β，一轮试验中甲药的得分记为X。

（1）求 X 的分布列；

（2）若甲药、乙药在试验开始时都赋予 4 分，$p_i\left(i=0,1,\cdots,8\right)$表示“甲药的累计得分为$i$时，最终认为甲药比乙药更有效”的概率，则 $p_0=0$，$p_8=1$，$p_i=ap_{i-1}+bp_i+cp_{i+1}\left(i=1,2,\cdots,7\right)$，

其中$a=p\left(X=-1\right)$，$b=p\left(X=0\right)$，$c=p\left(X=1\right)$。假设$\alpha=0.5$、$\beta=0.8$。

（ i ）证明：$\left\{p_{i+1}-p_i\right\}\left(i=0,1,\cdots,7\right)$为等比数列；

（ ii ）求 p_4，并根据 p_4的值解释这种试验方案的合理性。

概率统计解答题分析

以下是官方答案：

（1）X 所有可能额取值为-1，0，1，

$P(X=1)=\alpha(1-\beta)$，$P(X=-1)=(1-\alpha)\beta$，$P(X=0)=\alpha\beta+(1-\alpha)(1-\beta)$.

所以 X 的分布列为：

X	-1	0	1
P	$(1-\alpha)\beta$	$1-(\alpha+\beta)+2\alpha\beta$	$\alpha(1-\beta)$

（2）（ⅰ）由题意可得 $a=0.4$，$b=0.5$，$c=0.1$，

因为 $\alpha=0.5$，$\beta=0.8$，因此 $P_i=0.4P_{i-1}+0.5P_i+0.1P_{i+1}\,(i=1,2,\cdots,7)$，故 $0.4(P_i-P_{i-1})=0.1(P_{i+1}-P_i)$，

所以 $P_{i+1}-P_i=4(P_i-P_{i-1})$，又因为 $P_1-P_0=P_1\neq 0$

故数列 $\{P_{i+1}-P_i\}\,(i=0,1,\cdots,7)$ 为公比为 4、首项为 p 的等比数列。

概率统计解答题分析

以下是官方答案：

（ii）由（ i ）可得：$P_8=\left(P_8-P_7\right)+\left(P_7-P_6\right)+\cdots+\left(P_1-P_0\right)+P_0=\left(4^7+4^6+\cdots+1\right)P_1=\dfrac{\left(4^8-1\right)}{3}P_1$

由于 $P_8=1$，所以 $P_1=\dfrac{3}{4^8-1}$

故 $P_4=\left(P_4-P_3\right)+\left(P_3-P_2\right)+\left(P_2-P_1\right)+\left(P_1-P_0\right)+\cdots+P_0=\left(4^3+4^2+4^1+1\right)P_1=\dfrac{\left(4^4-1\right)}{3}P_1=\dfrac{1}{257}$

即 $P_4=\dfrac{\dfrac{3}{4^8-1}\left(4^4-1\right)}{3}=\dfrac{1}{4^4+1}$

P_4 表示最终认为甲药更有效的概率.由计算结果可以看出，在甲药治愈率为 0.5，乙药治愈率为 0.8 时，认为甲药更有效的概率 $P_4=\dfrac{1}{257}\approx 0.0039$，此时得出错误结论的概率非常小，说明这种试验方案合理.

概率统计解答题分析

试验背景解读——评比方案

1.这里的试验次数是不确定的，运气好的，4次就搞定，运气不好的，就要不断地试验；

2.为什么是4个？如果设置为1个，则检验的随机性太大，不够可靠；如果设置的更多，虽能使得试验结果与真实结果接近，不过这样会让试验更繁杂；

3.生活中也有类似的规则，比如乒乓球、羽毛球的赛制：当达到赛点后，如果双方比分接近，再进行若干轮比赛，直到一方率先比另一方多2分，就判定领先的人获胜。这背后的思想与本题的思想是一致的。

概率统计解答题分析

试验背景解读——递推关系

1.马尔科夫链——概率论中时间、状态均为离散的随机过程，描述一类重要的随机动态系统（过程）的模型，系统在每个时期所处的状态是随机的，从一时期到下时期的状态按一定概率转移，下时期状态只取决于本时期状态和转移概率。

题目中甲药的累计分数就是这样一个随机过程的马尔科夫链，我们关心甲药的累积分数和最后“试验表明甲药更有效”的概率之间的关系，这就是关系到甲药在不同分数之间转移的概率，也就是题目中给出的式子：

$$p_i = ap_{i-1} + bp_i + cp_{i+1}\left(i = 1, 2, \cdots, 7\right)$$

概率统计解答题分析

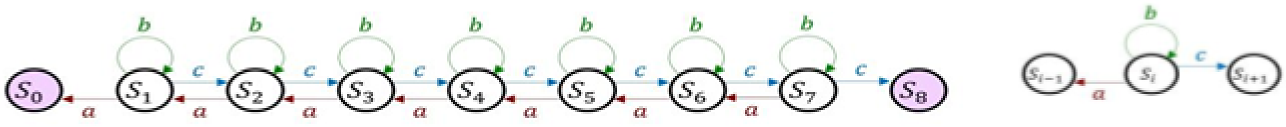
试验背景解读——递推关系

这个式子本质上表达了这个马尔科夫链的传递规律，P_i的定义是在累积分数i的情况下继续试验，最后甲药获胜的概率。而当前状态P_i下最终甲药获胜的概率，包含了三种情况，一种是通过概率a转移到P_{i-1}最后获胜，一种是通过概率b保持在P_i最后获胜，还有一种是通过概率c转移到P_{i+1}最后获胜。所以在当前这一步P_i获胜的概率，就是这三种情况下获胜的概率乘以它们发生的概率，也就是题目中给的公式，这个递推公式是甲药在不同状态下获胜的递推公式，而不是若干次之后分数i的公式。

概率统计解答题分析

试验背景解读——递推关系

下图是马尔科夫链：随机游走（Randow Walk）的示意图（状态S_i表示“甲药的累积得分为i”）



马尔科夫链具有马尔科夫性，又被称为无记忆性或无后效性，即未来只取决于现在，与过去无关，在该题中甲药在下一阶段的累积得分只与当前阶段的累计得分有关，而与过去时刻的累计得分无关。

事实上这个递推关系是由题意可以推出的，只不过它用到大学的概率知识，在这里直接给出大大降低了题目的难度，体现了高等数学知识在高中阶段的下放。

概率统计解答题分析

解答过程分析——知识来源

其实做第二问压根不用想太多，也不需马尔科夫链这个知识储备，按图索骥即可！！！

解：甲、乙两种药的治愈率分别记为α和β， $\alpha=0.5$，$\beta=0.8$（说明甲药的治愈率低），

由（1）$a=P(X=-1)=0.4$，$b=P(X=0)=0.5$，$c=P(X=1)=0.1$

因$P_i=aP_{i-1}+bP_i+cP_{i+1}$，所以$P_i=0.4P_{i-1}+0.5P_i+0.1P_{i+1}$，所以$5P_i=4P_{i-1}+P_{i+1}$，所以$P_{i+1}-P_i=4(P_i-P_{i-1})$，

又因为$P_1-P_0=P_1\neq 0$，所以$\{P_{i+1}-P_i\}(i=0,1,2,\cdots,7)$为等比数列.

此问完全是数列的知识。对数列的考查来说，一个超出常规方法求通项的数列问题总是提示先证明一个辅助数列是等差或等比，此题命题者已经给出了辅助数列，用基本的累加手法即可。

概率统计解答题分析

解答过程分析——知识来源

这样的二阶递推数列在课本上出现过

（人教版必修5数列复习参考题B组第6题）

已知数列$\{a_n\}$，$a_1=5$，$a_2=2$，$a_n=2a_{n-1}+3a_{n-2}\ (n\geq 3)$，对于这个数列的递推公式作一研究，能否写出它的通项公式？

解答过程分析——如何求P_4？

法1：累加法求通项

$$p_{i+1}-p_i=4(p_i-p_{i-1})=4^2(p_{i-1}-p_{i-2})=\cdots=4^{i-1}p_1$$

$$\left.\begin{aligned} &p_i-p_{i-1}=4^{i-1}p_1\\ &p_{i-1}-p_{i-2}=4^{i-2}p_1\\ &\cdots\\ &p_1-p_0=p_1 \end{aligned}\right\} \quad p_i=(1+4^1+\cdots+4^{i-1})p_1=\frac{4^i-1}{3}p_1$$

$$\therefore\ p_8=\frac{4^8-1}{3}p_1=1\ \therefore\ p_4=\frac{4^4-1}{3}p_1=\frac{4^4-1}{3}\cdot\frac{3}{4^8-1}=\frac{1}{4^4+1}=\frac{1}{257}$$

注：这个递推关系求通项的基础手法就是累加。

概率统计解答题分析

解答过程分析——如何求P_4？

法2：解方程求通项

$\because 5p_i = 4p_{i-1} + p_{i+1}$ $\therefore p_{i+1} - 4p_i = p_i - 4p_{i-1}$ $\therefore \{p_{i+1} - 4p_i\}$为常数数列

$\therefore p_i - 4p_{i-1} = p_1 - 4p_0 = p_1$①

$\because p_{i+1} - p_i = 4(p_i - p_{i-1})$ $\therefore p_i - p_{i-1} = 4^{i-1} p_1$②

$$p_i = \frac{4^i - 1}{3} p_1 \qquad \therefore p_4 = \frac{p_4}{p_8} = \frac{4^4 - 1}{4^8 - 1} = \frac{1}{4^4 + 1} = \frac{1}{257}$$

注：这个二阶递推不仅隐藏着一个是等比数列的辅助数列，还蕴含则另一个常数数列的辅助数列，通过解方程的方法就可以简单求出。

解答过程分析——如何求P_4？

法3：特征方程求通项

由递推关系$5P_i=4P_{i-1}+P_{i+1}$知，其对应的特征方程为$x^2-5x+4=0$，

解得特征根$x=1,4$

$$\therefore p_i=c_0+c_1\cdot 4^{i-1} \qquad p_0=c_0+c_1\cdot\frac{1}{4}=0,\ p_8=c_0+c_1\cdot 4^7=1\ \therefore c_1=\frac{4}{4^8-1},\ c_0=\frac{-1}{4^8-1}$$

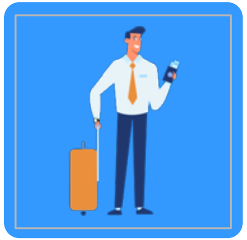
$$\therefore p_4=\frac{-1}{4^8-1}+\frac{4}{4^8-1}\cdot 4^3=\frac{1}{4^4+1}=\frac{1}{257}$$

注：该公式就是由全概率公式推出的二阶差分方程，也是一个二阶齐次线性递推数列，常用特征根法来求它的通项公式，这是竞赛中很基本的知识。

2019年全国I卷概率与统计解答题命题特点

概率统计以压轴题出现

在2018年概率与解析几何的解答题实验性的交换了位置与难度后，今年又向前走了一步，概率统计以压轴题的题目出现，令人耳目一新（惊掉下巴）。



实践性知识的考察进一步加大

在数学最直接的应用模块---概率统计上，题目的设计，一如既往的保持了高质量，既耳目一新又中规中矩，问题背景考生熟悉，贴近生活，但文字阅读量比较大，这对于考生从大量的文字阅读中提取关键信息与数据的能力要比较高。

解题入口比较宽回避了刻意的挖坑埋雷

题目的设置上层次递进有序，难度结构合理，大部分为“新常规”题目。中低档题平和清新，考察重点突出，高档题，不偏不怪，难得“正经”，体现了良好的区分性。同时题目设问的呈现方式清晰明了，都以学生熟悉的方式出现，解题入口比较宽，考生上手比较容易，但随着问题解决的深入，思维的灵活性与转化性的要求逐渐增高。

概率与统计解答题备考建议

1.回归课本

教材是学习数学基础知识，形成基本技能的“源泉”，是高考试题的重要知识载体.纵观高考试题中的统计与概率试题，大多数试题来源于教材，特别是大多数客观题是从课本的练习题或习题改编的，即使是解答题，也是由教材例题、习题的组合、加工和拓展而成，充分表现出教材的基础作用.复习阶段应该按《考试说明》对本部分内容的要求，以课本的例题、习题为素材，深入浅出、举一反三地加以类比、延伸和拓展，在“变式”上下功夫，力求对教材内容融会贯通，只有这样，才能“以不变应万变”，达到事半功倍的效果.当然，如果再做一些经典的高考试题，对考生的复习也很有效。例如：2015年19题，就是源于课本的很好的典范.

概率与统计解答题备考建议

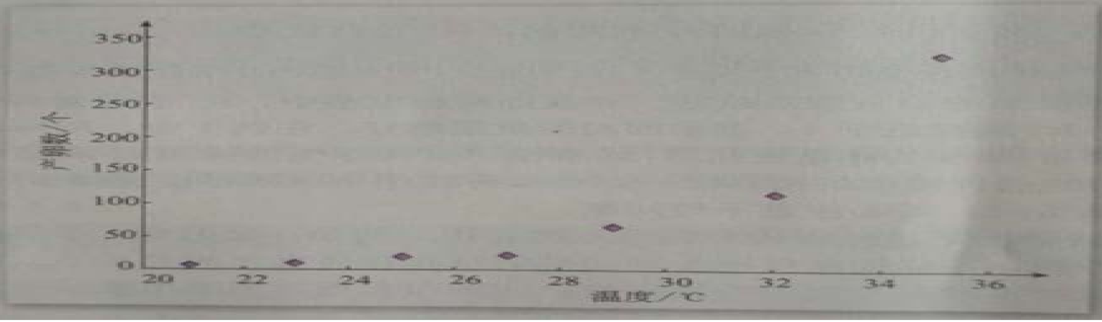
1.回归课本

例 2　一只红铃虫的产卵数 y 和温度 x 有关．现收集了7组观测数据列于表 3-3 中，
立 y 关于 x 的回归方程．

表 3-3

温度 x/℃	21	23	25	27	29	32	35
产卵数 y/个	7	11	21	24	66	115	325

解：根据收集的数据作散点图（图 3.1-4）．



概率与统计解答题备考建议

2.切实重视阅读能力，培养应用意识

四关

01 计算关

即需要较强的计算能力

02 事理关

即读懂题意，需要一定的阅读理解能力

03 文理关

即把文字语言转化为数学语言

04 数理关

即构建相应的数学模型，构建之后还需要扎实的基础知识和较强的数理能力

概率与统计解答题备考建议

3.强化方法的选择

由于这部分知识多而复杂，因此要对它们进行整理，使它们在大脑中构建良好的数学认知结构，形成条理化、有序化、网络化的有机体系.

几个重要结论要记好：

（1）在频率直方图中，最高矩形的中点对应值是众数；中位数的左右两边的直方图面积相等；平均数则是每组频率的中间值乘频数再相加.

（2）均值与方差的求法

① 离散型随机变量 ②若$X\sim B(n, p)$，直接利用公式 ③利用公式求$E(aX+b)$，$D(aX+b)$.

（3）线性回归方程一定过样本点中心.

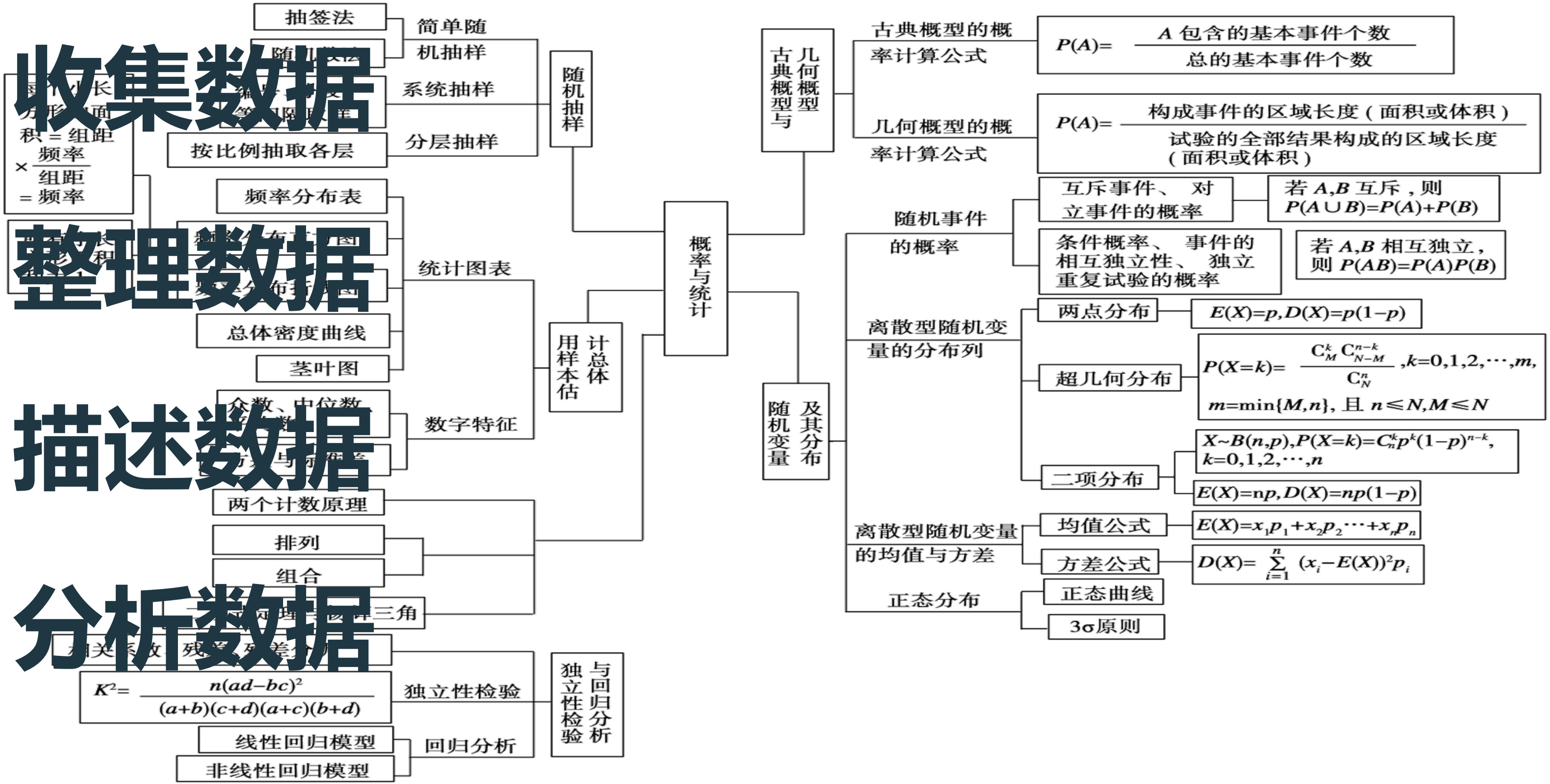
概率与统计解答题备考建议

收集数据

整理数据

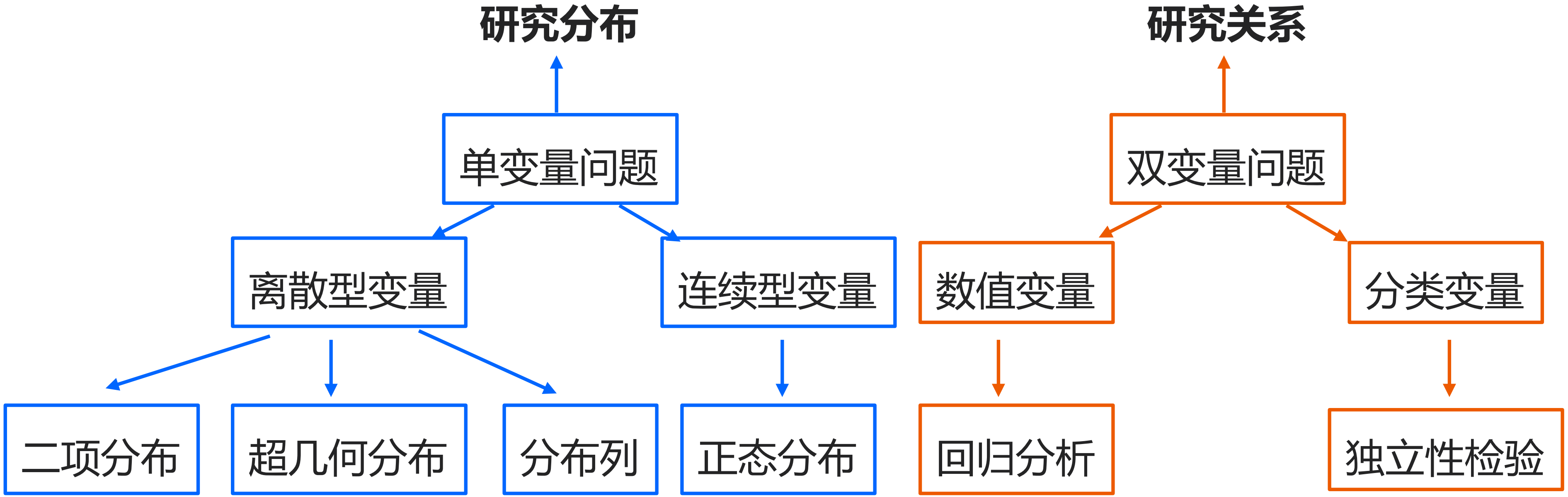
描述数据

分析数据



概率与统计解答题备考建议

概率统计两类问题



概率与统计解答题备考建议

4.注意与其它板块间的结合（数列，导数，函数）

概率统计应用题多以实际生活中的生产控制、风险与决策为背景，注重阅读理解、抽象概括、数据加工处理和数据应用能力，因此培养学生的应用意识、提高学生的应用能力显得尤为重要，以全国高考试题为抓手，提高分析和解决问题的能力.

概率与统计解答题备考建议

5.重视数学思想方法的渗透

数学思想方法作为数学的精髓，历来是高考数学考查的重中之重.它蕴涵在数学知识发生、发展和应用的全过程.在概率统计的内容中蕴涵着丰富的数学思想方法，如分类讨论、函数与方程、转化与化归等.概率统计为人们处理现实数据信息，分析、把握随机事件，提供了强有力的工具（计算随机事件发生的概率、求随机变量的数学期望与方差），也更加丰富、完善了中学数学思想方法，进一步拓宽了知识的应用空间.因此，合理选择解题方法是快速解答概率习题的有效手段.

概率与统计解答题备考建议

在统计与概率的审题教学中，要引导学生审清概念、审清图表，审清符号，并善于对文字语言、图表语言、符号语言三者进行灵活的转化.统计与概率问题的解答题离不开数据的分析、整理与计算，要注意引导学生提高分析能力，加强运算能力，养成检验习惯.在高考题中常将统计概率解答题当作应用题对待，因此在复习教学时要引导学生加强解答过程的规范训练.

高考中对统计与概率的考查，除了常用的策略外，还着意考查偶然与必然的思想、分类与整合的思想以及数据处理能力、运算求解能力.复习中只有牢牢抓住这些重点，才能把统计与概率的知识、思想和方法落到实处.

谢　谢!